

Lösungen Aufgabe 4:

$$T(n) = \{3 \cdot (T(\frac{n}{2}) + cn, \text{ für } n > 1, \text{ ansonsten d.}$$

Erklärung

Schritt 1: Setze **T** ein:

$$T(n) = 3 \cdot (3 \cdot T(\frac{n}{2}) + cn) + cn$$

Schritt 2: Setze für alle **n** das Argument ($\frac{n}{2}$) von **T** ein:

$$\text{Und man erhält: } T(n) = 3 \cdot (3 \cdot T(\frac{n}{2^2}) + c \cdot \frac{n}{2^1}) + cn$$

Explizite Vorschrift

Schrittweise Iteration, beginnend bei der Ausgangsform:

1. $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{2}) + cn$
2. $T(n) = 3 \cdot (3 \cdot T(\frac{n}{2^2}) + c \cdot \frac{n}{2^1}) + cn$
 $\Rightarrow 3^2 \cdot T(\frac{n}{2^2}) + 3 \cdot \frac{cn}{2^1} + cn$
3. $T(n) = 3^2 \cdot (3 \cdot T(\frac{n}{2^3}) + c \cdot \frac{n}{2^2}) + 3 \cdot \frac{cn}{2^1} + cn$
 $\Rightarrow 3^3 \cdot T(\frac{n}{2^3}) + 3^2 \cdot \frac{cn}{2^2} + 3 \cdot \frac{cn}{2^1} + cn$

$$\Rightarrow T(n) = 3^k \cdot T(\frac{n}{2^k}) + cn \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{3}{2})^i$$

Aufwandsermittlung

Wie man sieht muss $k = \log n$ sein, damit $\frac{n}{2^k} = 1$ ist. Dementsprechend wird für jedes k eingesetzt. Ausserdem wird für das entstehende $T(1)$ nach der Bedingung d eingesetzt.

$$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + cn \cdot \sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i \text{ geometrische Reihe!}$$

$$\text{geometrische Reihe: } \sum_{i=0}^{k-1} (a \cdot q^i) = a \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} \text{ Hier ist } a = 1, q = \frac{3}{2}, k = \log n$$

und $i = i$

$$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + cn \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}$$

$$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + cn \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 1}{\frac{1}{2}}$$

$$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + 2cn \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log n} - 2$$

Da $a^{\log b} = b^{\log a}$, stellen wir nach n um.

$$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn \cdot n^{\log(\frac{3}{2})} - 2$$

$$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn^{\log(\frac{3}{2})+1} - 2$$

Da $\log 2 = 1$ gilt, setzen wir entsprechend ein.

$$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn^{\log(\frac{3}{2})+\log 2} - 2$$

Da die Potenz gleichbedeutend mit $\log 3 - \log 2 + \log 2$ ist, folgt:

$$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn^{\log 3} - 2$$

Zusammengefasst:

$$T(n) = n^{\log 3} \cdot (d + cn) - 2$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(n^{\log 3})$$

Die rekursive Funktion $T(n)$ ist also eine Funktion mit dem Aufwand der Ordnung $\mathcal{O}(n^{\log 3})$.