

Verzweigen und Beschnen

Mario Reichel, Mark Ziener

4. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg

Aufwand des naiven Lösungsweges

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Rucksackproblem

Branch and Bound

Branch and Bound

Anwendung auf das Rucksackproblem

AVL-Bäume

Anwendung auf
das

Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit Branch and Bound

Rundreise mit

Branch and Bound

Das Rundreiseproblem

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziemer

Es wird die der Kürzeste weg zwischen mehreren Punkten gesucht, wobei Startposition = Endposition.

praktische Anwendung:

- ▶ Weg eines Ausendienstmitarbeiters
- ▶ Schnelles abarbeiten von Aufträgen eines Lieferservices
- ▶ besuch möglichst vieler Sehenswürdigkeiten in einer kurzen Zeit
- ▶ möglichst wenig aufwand für einen Studenten

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

Das Rundreiseproblem

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziemer

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit

Branch and Bound

- ▶ traveling-salesman-Problem, kurz TSP
- ▶ ist ein Minimierungs- / Optimierungsproblem
- ▶ durch Graphen (Knoten und Punkte) darstellbar
- ▶ Symmetrisch / Assymetrisch

1. zuerst wird das 1. Element aus der Liste von Punkten entfernt

Naiver Lösungsweg

1. zuerst wird das 1. Element aus der Liste von Punkten entfernt
2. für die restlichen Elemente werden alle möglichen Permutationen gebildet

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

Naiver Lösungsweg

1. zuerst wird das 1. Element aus der Liste von Punkten entfernt
2. für die restlichen Elemente werden alle möglichen Permutationen gebildet
3. das 1. Element wird wieder an den Anfang und an das Ende jeder Permutation angehängt

1. zuerst wird das 1. Element aus der Liste von Punkten entfernt
2. für die restlichen Elemente werden alle möglichen Permutationen gebildet
3. das 1. Element wird wieder an den Anfang und an das Ende jeder Permutation angehängt
4. für jede Route wird aus ihren Stationen und einer Entfernungsmatrix die Gesamtstrecke ermittelt

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

1. zuerst wird das 1. Element aus der Liste von Punkten entfernt
2. für die restlichen Elemente werden alle möglichen Permutationen gebildet
3. das 1. Element wird wieder an den Anfang und an das Ende jeder Permutation angehängt
4. für jede Route wird aus ihren Stationen und einer Entfernungsmatrix die Gesamtstrecke ermittelt
5. die Route mit der kürzesten Gesamtstrecke wird als Lösung zurückgegeben

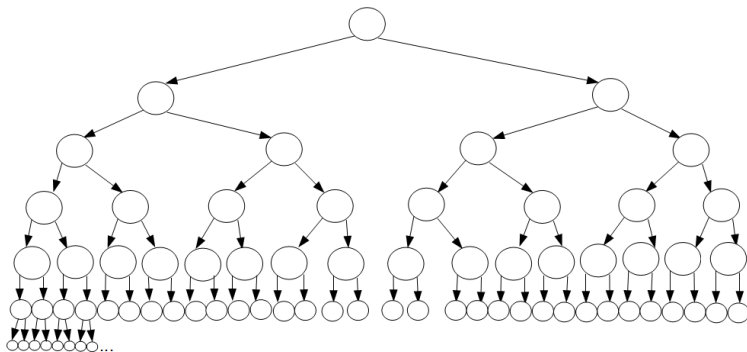
Aufwand des naiven Lösungsweges

- ▶ sehr hoher Aufwand durch das Bilden und "durchprobieren" aller möglicher Permutationen

Punkte (n)	Kombinationen (n-1)!
3	2
5	24
10	362880
20	(1,216451e+17)
50	(6,082818e+62)
100	(9,332621e+155)

Wiederholung Systematische Suche

- ▶ Lösungsbäume Tiefen/Breitensuche sehr groß
- ▶ Systematisch Vollständige suche exponentieller Zeitaufwand
- ▶ Bsp: 0/1 Rucksackproblem 2^n Knoten



Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem
Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

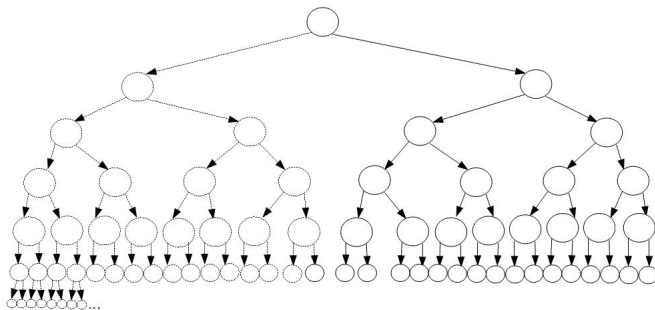
Anwendung auf
das

Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

Wie kann man dem Entgegenwirken?

- ▶ Ausschließen von Teilbäumen ohne Beitrag zur Lösung
- ▶ Drastische Beschleunigung
- ▶ Trotz allem Exponentieller Aufwand
- ▶ Worst Case Fall gleicher Zeitaufwand



Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit

Branch and Bound

- ▶ Engl Branch and Bound
- ▶ Weniger Knoten → Weniger Zeitaufwand
- ▶ Erreichen mittels Wertschranke (Bound)
- ▶ Für Knoten (Branch-Schritte)
- ▶ Wertschranke garantiert das keiner der Folgeknoten bessere Bewertung hat.

Hauptproblem:

- ▶ Nicht zu expandierende Knoten finden
- ▶ Bewertungsalgorithmus
- ▶ Bewertung richtet sich nach Art des Problems
- ▶ Rucksackproblem → Maximierungsproblem → Obere Schranke
- ▶ Rundreiseproblem → Minimierungsproblem → Untere Schranke

Bewertungsfunktion für und wieder

- ▶ Kann nicht generiert werden
- ▶ Muss speziell an Problem angepasst werden
- ▶ Setzt gewisse Erfahrung voraus
- ▶ Komplexität spielt eine Rolle
- ▶ Umfangreiche Wertschranke → optimale Lösung → großer Rechenaufwand
- ▶ Simple Wertschranke → Evtl Ungenau → Wenige Ausschlüsse → Worst-Case-Fall
- ▶ Mittelweg finden → Näherungswert

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziemer

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

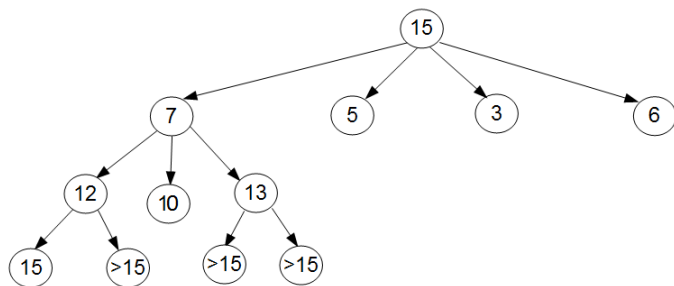
Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

Beispiel



Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

Anwendung auf das Rucksackproblem

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das
Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

- ▶ Sehr weit verbreitetes Beispiel der Komplexitätstheorie
- ▶ effektivsten Kombination von n Gegenständen
- ▶ Gegenständen gewicht wert
- ▶ Beispiele: Koffer Packen, Juwelendieb

- ▶ Erzeugen aller Kombinationen
- ▶ Bei hohen Werten sehr Zeitaufwändig
- ▶ 60 Gegenständen n^{60} bei 10^9 Berechnungen/s \rightarrow 30 Jahre
- ▶ Exponentieller Anstieg

Mathematische Formulierung

- ▶ n = Anzahl der Objekte
- ▶ g_i = Gewicht von Objekt i
- ▶ w_i = Wert von Objekt i
- ▶ K = maximal Gewicht
- ▶ g_i/w_i = Effektivität

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit

Branch and Bound

- ▶ gesuchte Ergebnisvektor ist $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, mit $x_i \in \{0, 1\}$, für den gilt:

- ▶ $\sum_{i=1}^n x_i g_i \leq K$ sowie

- ▶ $\sum_{i=1}^n x_i w_i \rightarrow \max$

- ▶ Boundbestimmung durch
$$\sum_{i=1}^k x_i w_i + (K - \sum_{i=1}^k x_i g_i) \cdot \frac{w_{k+1}}{g_{k+1}}$$

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

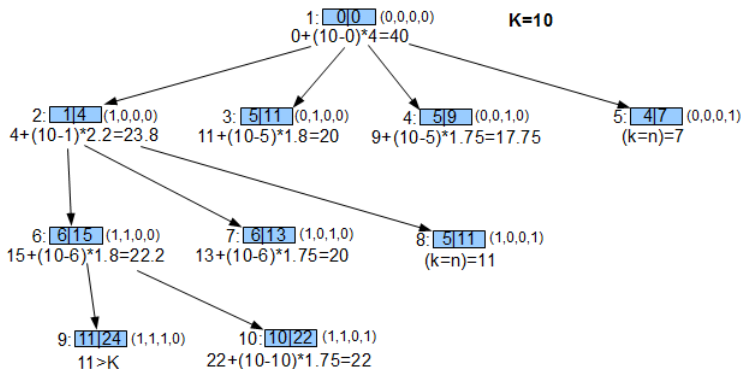
Rucksackproblem

AVL-Bäume

Rundreise mit

Branch and Bound

Beispiel



Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem

AVL-Bäume

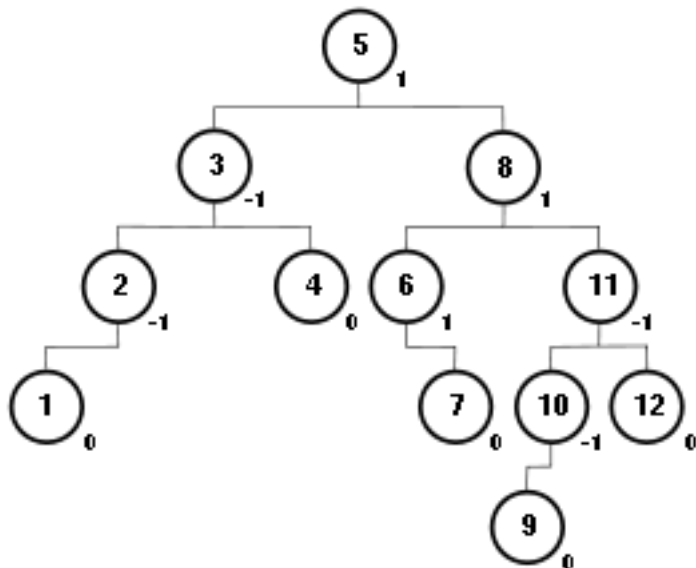
Rundreise mit
Branch and Bound

- ▶ implementieren Prioritätslisten
- ▶ balancierter binärer Suchbaum
- ▶ durch gleichmäßigen Suchbaum, Suchaufwand $O(\log n)$
- ▶ Suche in eine linearen Liste, Aufwand $O(n)$

ein AVL-Baum muss können:

- ▶ einfügen eines Elementes
- ▶ Suchen eines / des kleinsten Elementes
- ▶ ausbalancieren
- ▶ einfache und doppelte Links und Rechts rotation

Beispiel AVL-Baum



Rundreise mit Branch and Bound

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

Suche nach geeigneter Bound-Funktion:

- ▶ jeweils zum nächsten nicht besuchten Punkt mit kürzester Entfernung
- ▶ in Fachliteraturen oft reduzierte Entfernungsmatrix verwendet
- ▶ durch Zeilen- und Spaltenminima bildung eines Bounds
- ▶ ist Potenziell die kürzeste Strecke

Beispiel reduzierte Entfernungsmatrix

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

24 ₁₆	14 ₆	8 ₀	10 ₂	8
12 ₀	16 ₄	14 ₂	18 ₆	12
6 ₁	7 ₂	5 ₀	12 ₇	5
11 ₀	13 ₂	16 ₅	14 ₃	11
0	2	0	3	41

Algorithmus Rundreise mit Branch and Bound

Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

1. für alle Folgeknoten Entfernungsmatrix editieren
2. jeden Knoten in einem AVL-Baum speichern
3. für jeden Knoten den Bound bilden
4. Knoten mit bestem Bound weiterverfolgen
5. bei drastisch ansteigendem Bound rücksprung und verfolgen eines andern Knotens
6. wiederholung bis äußerer Knoten erreicht

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

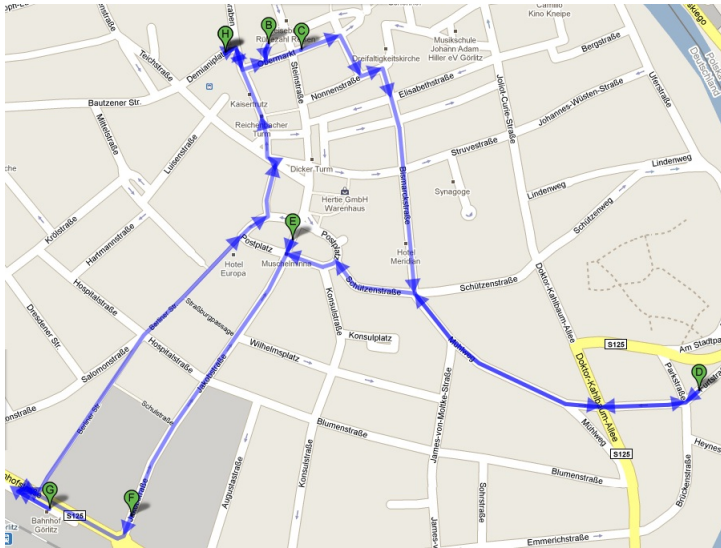
Branch and Bound

Anwendung auf
das

Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound

Beispiel kürzester weg



Verzweigen und
Beschränken

Mario Reichel,
Mark Ziener

Rundreiseproblem

Naiver Lösungsweg
Aufwand des naiven
Lösungsweges

Rucksackproblem

Branch and Bound

Anwendung auf
das
Rucksackproblem
AVL-Bäume

Rundreise mit
Branch and Bound