Iterationsverfahren

Aufgabe:

$T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{2}) + cn$, für $n > 1$, ansonsten d.

Lösung:

$\mathcal{O}(n^{log3})$

Lösungsweg:

Explizite Vorschrift

Schrittweise Iteration, beginnend bei der Ausgangsform:

1. $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{2}) + cn$

2. $T(n) = 3 \cdot (3 \cdot T(\frac{n}{2^2}) + c \cdot \frac{n}{2^1}) + cn)$

$\Rightarrow 3^2 \cdot T(\frac{n}{n^2}) + 3 \cdot \frac{cn}{2^1} + cn$

3. $T(n) = 3^2 \cdot (3 \cdot T(\frac{n}{2^3}) + c \cdot \frac{n}{2^2}) + 3 \cdot \frac{cn}{2^1} + cn$

$\Rightarrow 3^3 \cdot T(\frac{n}{2^3}) + 3^2 \cdot \frac{cn}{2^2} + 3 \cdot \frac{cn}{2^1} + cn$

$$\Longrightarrow T(n) = 3^k \cdot T(\frac{n}{2^k}) + cn \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{3}{2})^i$$

Aufwandsermittlung

Wie man sieht muss $k = \log n$ sein, damit $\frac{n}{2^k} = 1$ ist. Dementsprechend wird für jedes k eingesetzt. Ausserdem wird für das entstehende T (1) nach der Bedingung d eingesetzt.

$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + cn \cdot \sum_{i=0}^{logn-1} (\frac{3}{2})^i$ geometrische Reihe!

Definition geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{k-1} (a \cdot q^i) = a \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$

Hier ist $a = 1, q = \frac{3}{2}, k = \log n$ und $i = i$

$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + cn \cdot \dfrac{(\frac{3}{2})^{\log n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$

$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + cn \cdot \dfrac{(\frac{3}{2})^{\log n} - 1}{\frac{1}{2}}$

$T(n) = 3^{\log n} \cdot d + 2cn \cdot (\frac{3}{2})^{\log n} - 2$

Da $a^{\log b} = b^{\log a}$, stellen wir n um.

$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn \cdot n^{\log(\frac{3}{2})} - 2$

$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn^{\log(\frac{3}{2})+1} - 2$

Da $\log 2 = 1$ gilt, setzen wir entsprechend ein.

$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn^{\log(\frac{3}{2})+\log 2} - 2$

Da der Exponent gleichbedeutend mit $\log 3 - \log 2 + \log 2$ ist, folgt:

$T(n) = n^{\log 3} \cdot d + 2cn^{\log 3} - 2$

Zusammengefasst:

$T(n) = n^{\log 3} \cdot (d + cn) - 2)$

$\Rightarrow O(n^{\log 3})$

Die rekursive Funktion T(n) ist also eine Funktion mit dem Aufwand der Ordnung

$\mathcal{O}(n^{\log 3})$.