Das P-NP-Problem

Christian Wagenknecht

Wir betrachten *Optimierungsprobleme*, wie beispielsweise

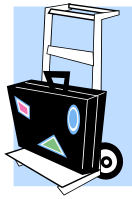
- das 0-1-Rucksackproblem
- das Rundreiseproblem (TSP)

Zielfunktionen:

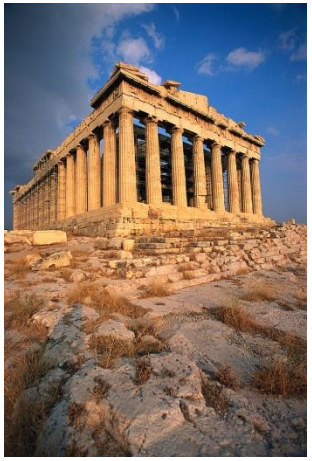
- maximaler Gesamtwert der eingepackten Gegenstände
- minimale Rundreiselänge

Minimum-Probleme $\rightleftarrows$ Maximum-Probleme

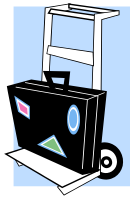
TSP = Traveling Salesman Problem



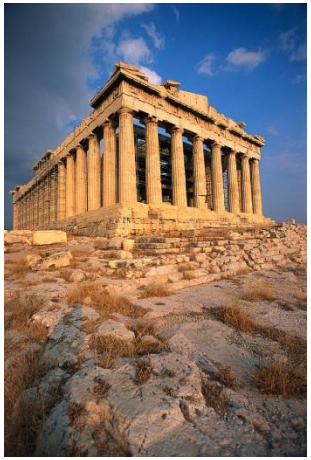
Gesucht: kürzeste Rundreise durch n Städte



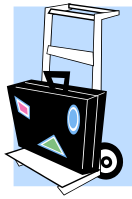
TSP = Traveling Salesman Problem



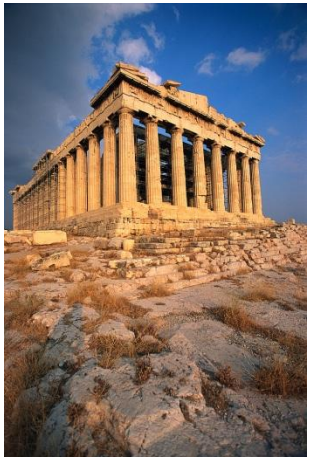
Gesucht: kürzeste Rundreise durch n Städte



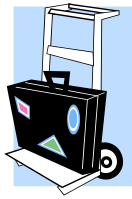
TSP = Traveling Salesman Problem



Gesucht: kürzeste Rundreise durch n Städte



TSP = Traveling Salesman Problem



Gesucht: kürzeste Rundreise (HAMILTON-Kreis) durch n Städte
Symmetrisches TSP → ungerichteter Graph (ebenso asymmetrisch möglich)

Lösung: Minimum aus $n!$ Lösungskandidaten

Bewertung der Lösungsmethode:

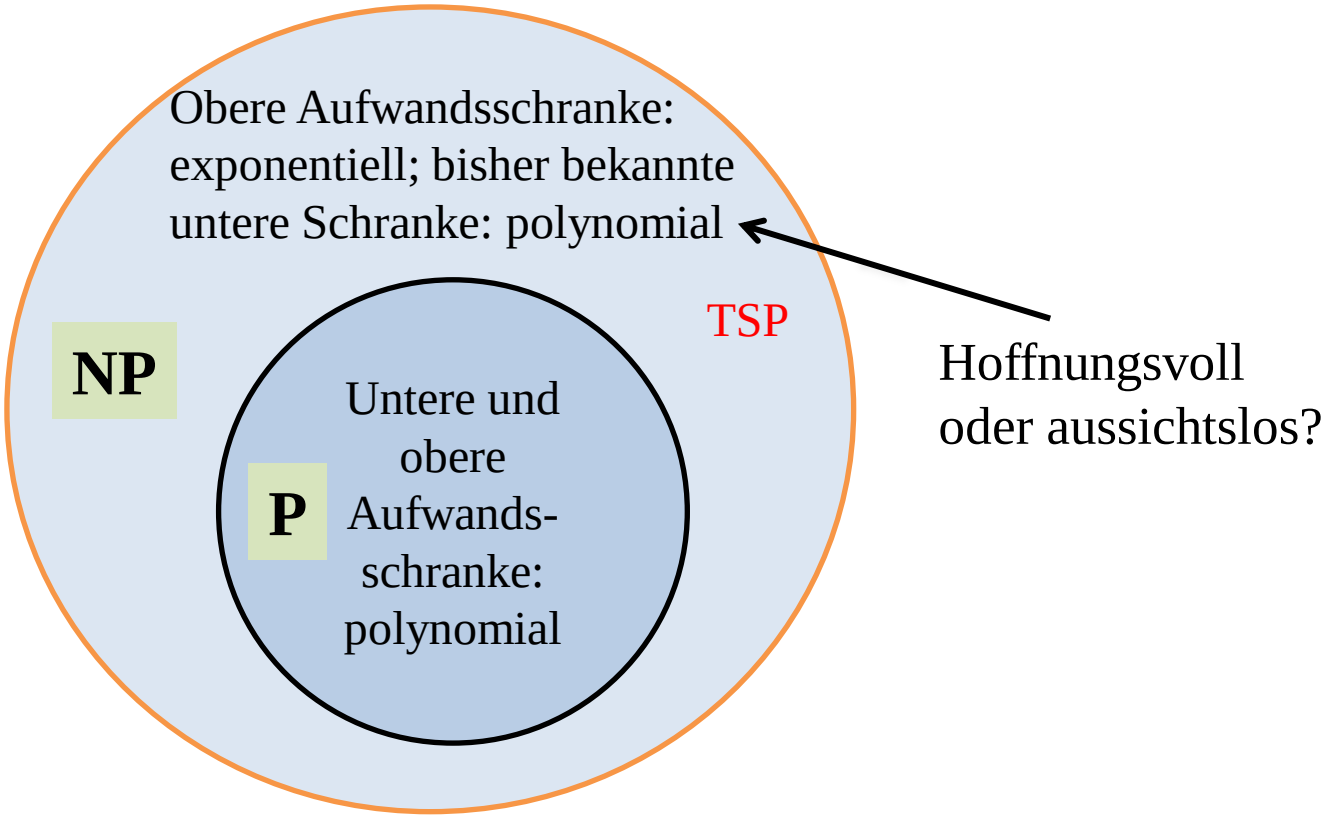
Exponentieller Aufwand: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für sehr große n

polynomialer Aufwand für die Berechnung der Weglängen für jeden Kandidaten und einmal Minimum-Bestimmung

Gesamtaufwand: in $O(k^n),\ k > 1$

Gibt es einen Polynomzeit-Algorithmus zur Lösung des TSP?

Konnte bisher nicht beantwortet werden. Vermutung: NEIN.
"Revolution", wenn JA. (Anwendung: z.B. Logistikprobleme)

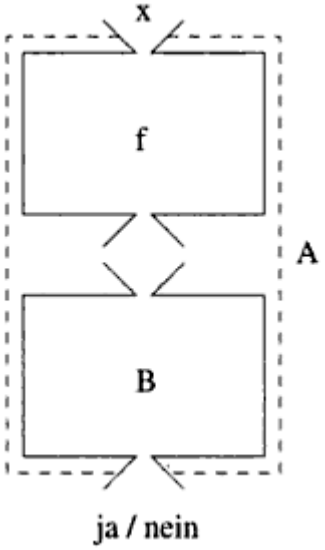


Gibt es Probleme, die ähnlich schwierig sind wie das TSP?

Was bedeutet
"*A ist im Wesentlichen nicht schwieriger als B*"?

Stephen Arthur Cook,
geb. 14.12.39

Polynomiale Reduktion:



$f: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ total berechenbar in Polynomzeit.

$A <_p B$, wenn f existiert, mit $A \subseteq \Sigma_1^*, B \subseteq \Sigma_2^*$, so dass für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Hinweis: Optimierungsproblem → Entscheidungsproblem

Satz: Wenn $A <_p B$ und $B \in \boldsymbol{P}$, dann gilt $A \in \boldsymbol{P}$.

Beweis: trivial

Satz: Wenn $A <_p B$ und $B \in \boldsymbol{NP}$, dann gilt $A \in \boldsymbol{NP}$.

Beweis: trivial

Hilft uns das weiter?

JA: Klassifikation von Problemen (P oder NP), durch polynomiale Reduktion auf "passende" Probleme aus P bzw. NP.

Problemklassifikation

Man kann sich sehr stark irren:

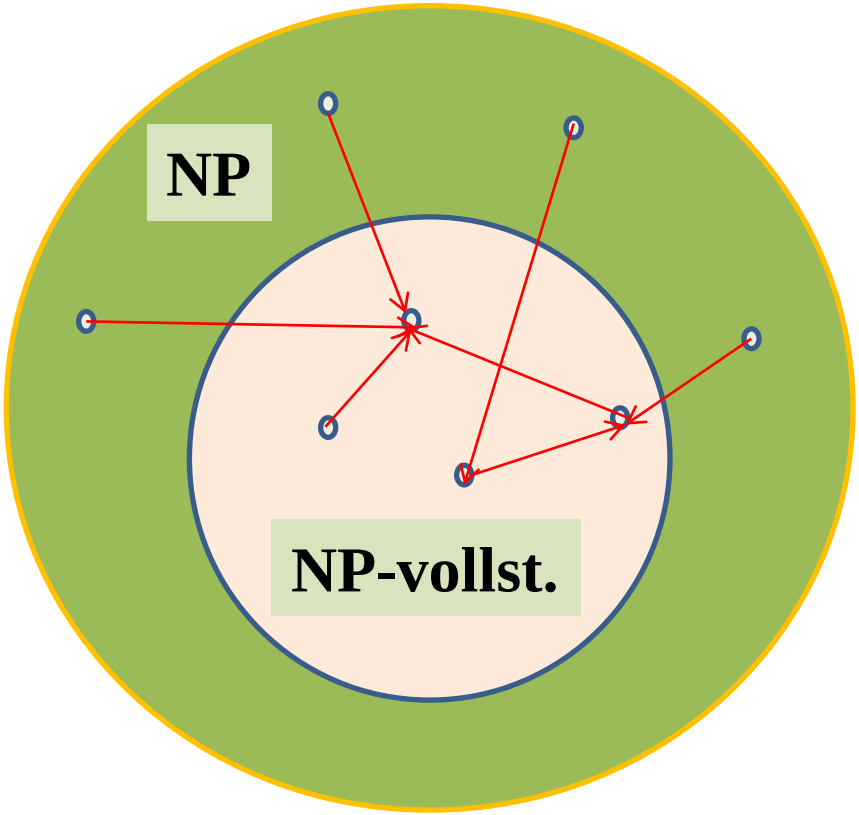
Die Fragestellungen für einfache bzw. sehr schwierige Probleme unterscheiden sich mitunter nur sehr wenig.

LEICHT: Finde den *kürzesten* Weg von A nach B in einem gegebenen gewichteten Graphen.

SEHR SCHWER: Finde den *längsten* Weg von A nach B in einem gegebenen gewichteten Graphen.

Alle NP-Probleme lassen sich durch polynomiale Reduktion auf eine gewisse Teilmenge der NP-Probleme zurückführen.

Diese Teilmenge nennen wir **NP-vollständige Probleme**.



Hinweis: Die Relation $<_p$ ist transitiv.

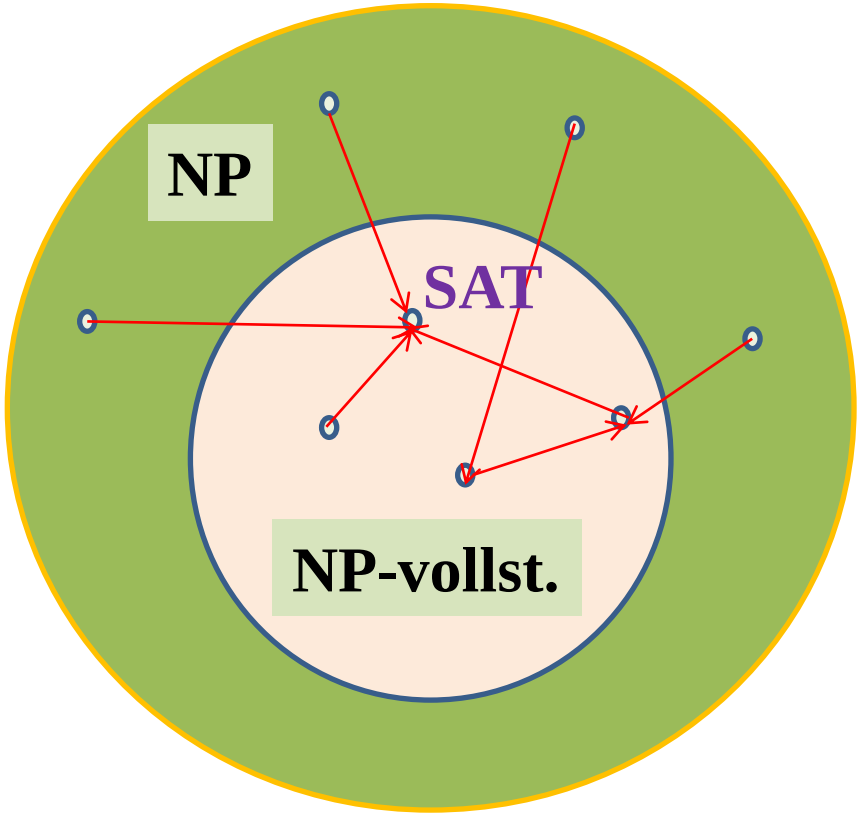
Henne-Ei-Problem

Wir brauchen ein "erstes" NP-vollständiges Problem, das nicht mittels polynomialer Reduktion als solches nachgewiesen wurde.

SAT-Problem: (SAT = satisfiability problem)
Erfüllbarkeitsproblem
Gesucht wird eine Belegung der booleschen Variablen x_i mit je einem Wert aus $\{true, false\}$, sodass ein gegebener Ausdruck in KNF, wie etwa $(x_1 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_5)$, wahr wird.

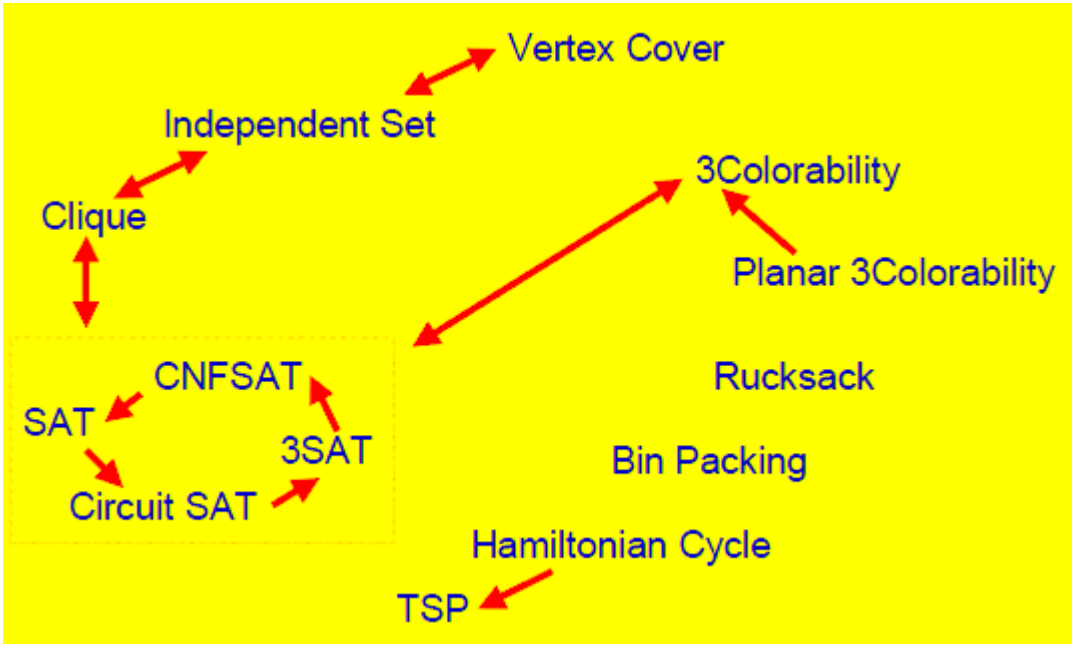
Cook erhielt 1982 den Turing-Award: SAT ist NP-vollständig. (1971)

SAT – ein besonderes NP-vollständiges Problem



Reduktion auf "passende" Probleme

SAT $<_p$ 3SAT $<_p$ CLIQUE …



3SAT: Ist eine KNF Formel mit maximal 3 Literalen pro Klausel erfüllbar?

CLIQUE: Enthält der betrachtete Graph (mind.) eine Clique der Größe k

NP-Vollständigkeit und das P-NP-Problem

Wenn es gelingt, *ein einziges* NP-vollständiges Problem deterministisch in Polynomzeit zu lösen, dann hat man mit einem Schlag je eine Polynomzeitlösung *für jedes* NP-Problem.

Charakterisierung der Probleme aus **NP**

NP … nichtdeterministisch in Polynomzeit

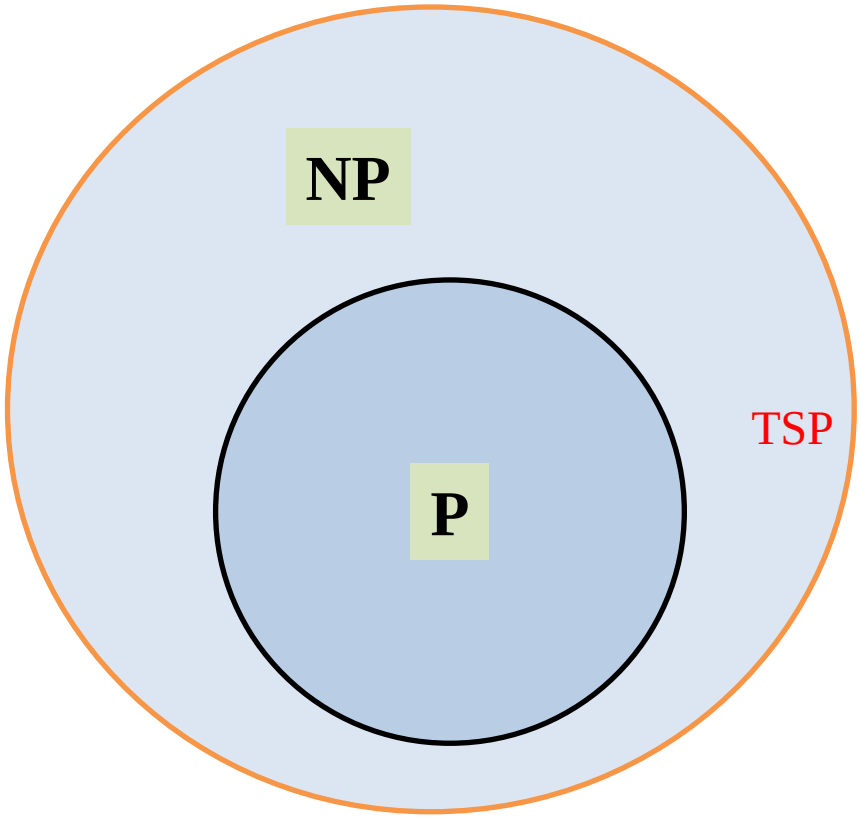
→ Eine Nichtdeterministische Turing-Maschine benötigt zur Lösung Polynomzeit.

<u>Konzeptionelle Vorstellung</u>:

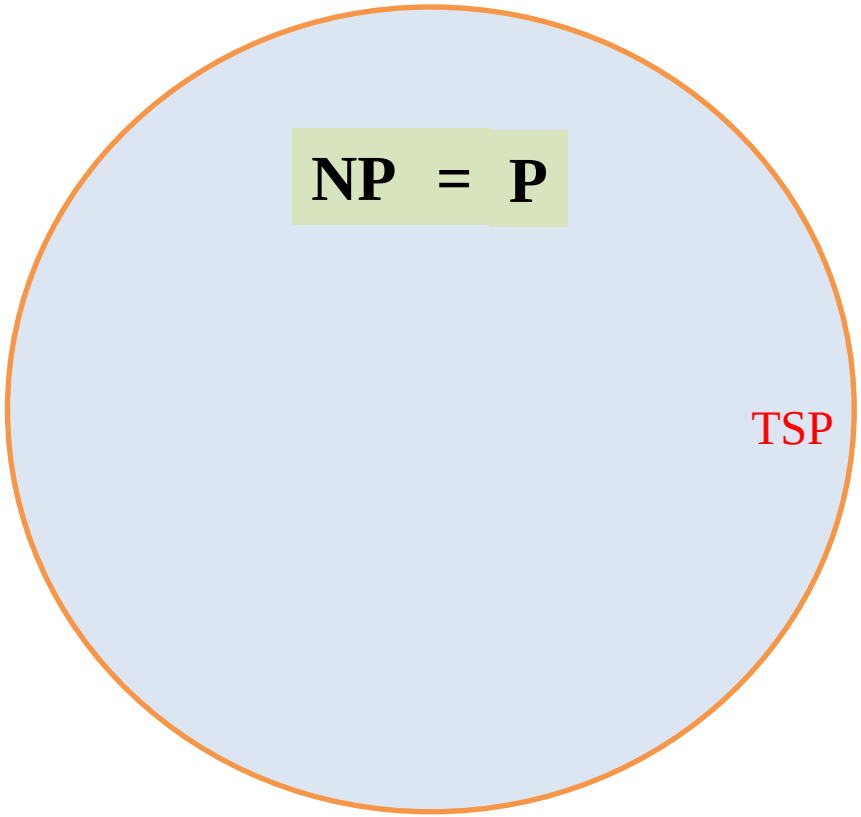
1. Die Maschine errät einen Lösungskandidaten (z.B. Städtefolge) – "gute Fee" – und
2. anschließend wird verifiziert, dass der Vorschlag wirklich eine Lösung ist.

Schritt 2 ist deterministisch in Polynomzeit möglich.

Klar ist $\boldsymbol{P \subseteq NP}$.



Aber es könnte (obwohl unwahrscheinlich) auch $\boldsymbol{NP = P}$ gelten.



Seit August 2010 wissen wir: $P \subset NP$

$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$

Vinay Deolalikar
HP Research Labs, Palo Alto
vinay.deolalikar@hp.com

August 6, 2010

Website

66-seitiger Beweis (1. Version);
Verifikation/Überarbeitung laufen;
Es winkt 1 Mill. US Dollar.

Clay Mathematics Institute (CMI) in Cambridge (Massachusetts): Millennium-Probleme (Liste von 2000) – 7 Einträge; Poincaré-Vermutung (2002 gelöst von Grigori Jakowlewitsch Perelman)

Ergebnis:

Es gibt *kein* effizientes Verfahren, um das TSP (exakt) zu lösen.

Alternative: Näherungsverfahren